

82

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

**ПРОГРАМА
ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ
З ДИСЦИПЛІНИ**

"ВИЩА МАТЕМАТИКА"

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Дніпропетровськ
2003

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

**ПРОГРАМА
ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ
З ДИСЦИПЛІНИ**

**“ВИЩА МАТЕМАТИКА”
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ**

Рекомендовано до видання науково-методичною радою університету
(протокол № 1 від 07.09.2001 р.)

Дніпропетровськ
НГУ України
2003

Програма та контрольні завдання з дисципліни "Вища математика" для студентів заочної форми навчання / Уклад. Л.В.Новикова, С.О.Сушко, В.П.Орел, Л.І.Заславська. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет. 2003. – 36 с.

Укладачі:

Л.В.Новикова, д-р техн. наук, проф.
С.О.Сушко, канд. фіз.-мат. наук, доц.
В.П.Орел,
Л.І.Заславська, ст.викладач

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри вищої математики
Л.В.Новикова, д-р техн. наук, проф.

Мета даних методичних вказівок - допомогти студентам-заочникам правильно організувати свою самостійну роботу з оволодіння курсом вищої математики. Тут викладені загальні рекомендації з організації навчальної роботи і виконання контрольних завдань, програма курсу вищої математики, список літератури і завдання для контрольних робіт.

I. Загальні рекомендації студенту-заочнику з організації навчальної роботи над курсом вищої математики і виконання контрольних робіт

Основна форма навчальних занять студентів-заочників - самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається із наступних основних елементів: вивчення матеріалу за підручниками, розв'язування задач, самоперевірки і виконання контрольних робіт.

Керівництво і контроль самостійної навчальної роботи студентів здійснюють деканат і викладачі кафедри вищої математики на лекціях і практичних заняттях під час установчої сесії, під час консультацій в процесі рецензування контрольних робіт у міжсесійний період, а також на іспитах і заліках у період екзаменаційної сесії.

Вивчення матеріалу за підручником

Керівним документом для студента-заочника в роботі над курсом вищої математики служить програма, матеріал якої необхідно самостійно вивчити за підручником, звертаючи увагу на визначення основних понять курсу (границя, функція, похідна, первісна та ін.) і на приклади, які ілюструють ці визначення. Необхідно добиватися чіткої уяви про допущення і твердження теорем та повного розуміння їх доведення.

Настійно рекомендується вести короткий конспект, куди в належному порядку записувати назви питань, визначення, формулювання теорем і формули. На полях конспекту слід відмічати питання, які необхідно вивчити на консультаціях. Дуже корисно вести також робочий зошит з математики, де студент по пам'яті може довести теореми, відтворити розв'язування прикладів із підручника, побудувати аналогічні приклади, навести формули, розв'язати самостійно задачі, які дані у вказівках для кожного розділу. Правильно оформлені конспект і робочий зошит привчають до порядку в роботі і полегшують вивчення вищої математики, так як процес повторювання і записування сприяє засвоєнню і запом'ятовуванню навчального матеріалу.

Розв'язування задач

Один із кращих методів засвоєння, перевірки і закріплення теоретичного матеріалу - розв'язування задач. При розв'язуванні кожної задачі потрібно продумати план розв'язування і чітко обгрунтувати всі етапи цього плану, виходячи із теоретичних тверджень курсу. Якщо задача не розв'язується, слід ще раз уважно продивитися відповідний теоретичний матеріал і самостійно розв'язати наведені в підручнику задачі. Розв'язування задачі слід докладно

записати у робочому зошиті і довести до відповіді, яка вимагається умовою. Дуже корисно перевірити відповідь, розв'язавши задачу іншим способом або критично оцінивши цю відповідь. Продовжувати розв'язування задач певного типу необхідно до вироблення навичок їх розв'язування.

Консультації

Якщо при вивченні теоретичного матеріалу, розв'язуванні задач, самоперевірці або виконанні контрольної роботи у студента виникають які-небудь утруднення, він може звернутися в академію для одержання консультацій. Питання, винесене на консультацію повинно бути конкретним, з точною вказівкою місця в доведенні теореми, розв'язуванні задачі і т.п., починаючи з якого він, студент, потребує допомоги.

Важливим показником у навчальній роботі є вміння розбиратись самостійно в усіх питаннях програми, тому студенту слід звертатися за консультацією лише після кількох безрезультатних спроб самостійного вирішення питання, яке викликало утруднення.

Контрольна робота

Контрольна робота - важлива форма керівництва навчальними заняттями студента-заочника. Приступати до виконання контрольної роботи можна лише після вивчення відповідних розділів курсу і розв'язування достатньої кількості задач.

При виконанні контрольної роботи студент повинен строго дотримуватися таких вимог:

- 1) виконувати контрольні роботи строго за своїм варіантом, номер якого співпадає з останньою цифрою його навчального шифру;
- 2) кожен контрольну роботу виконувати в окремому зошиті в клітинку чорнилами будь-якого кольору крім червоного. У зошиті повинні бути поля для зауважень рецензента; в кінці зошита залишити кілька чистих аркушів для доповнень і виправлень у відповідності із зауваженнями рецензента;
- 3) оформлення обкладинки зошита повинно відповідати наведеному зразку

Контрольна робота № _____	
з вищої математики	
студента _____	
групи _____	заочного факультету
Національної гірничої академії України	
Шифр _____	Дата _____
Домашня адреса _____	

Наприкінці роботи (в тексті) поставити дату виконання і особистий підпис.

4) Робота, викона (повністю або частково) за чужим варіантом, не зараховується;

5) Перед розв'язуванням кожної задачі повністю переписати її умову, замінивши загальні дані конкретними із свого варіанту;

Розміщувати задачі (і їх розв'язування) в порядку зростання номера, зберігаючи нумерацію.

6) Розв'язування задач записувати акуратно, докладно, супроводжуючи необхідними кресленнями.

Робота, виконана з будь-якими порушеннями перерахованих вимог, не зараховується і повертається студенту для переробки.

Студент, який не виконав хоча б одну контрольну роботу, до іспиту не допускається.

Іспити і залік

Іспити і залік з вищої математики служать для перевірки і оцінки роботи студента-заочника із засвоєння теоретичних питань програми, для перевірки і оцінки вміння застосовувати теорію до розв'язування задач, для розвитку творчого мислення, набуття навичок самостійності та ін.

Знання студента можуть бути визнані задовільними лише в тому випадку, якщо він точно і глибоко формулює визначення і теореми, робить висновки про їх застосування в розв'язуванні задач, а також впевнено і без помилок розв'язує типові задачі.

Приймання заліків і екзаменів проводиться в порядку і обсязі, які встановлені навчальними планами і програмою курсу.

II. Програма курсу вищої математики

Лінійна алгебра

Поняття матриці. Основні дії з ними. Визначники другого, третього, n -го порядків. Властивості визначників. Мінор. Алгебраїчне доповнення. Ранг матриці, методи його визначення. Обернення матриці.

Методи розв'язування систем лінійних рівнянь: матричний метод, формули Крамера, метод Гаусса.

Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою визначників. Неоднорідна лінійна система рівнянь. Однорідна лінійна система. Нетривіальні розв'язки однорідної лінійної системи. Фундаментальна система розв'язків. Загальний розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Загальна лінійна система. Теорема Кронекера-Капеллі. Власні числа та власні вектори.

Векторна алгебра

Скаляри та вектори. Геометричний вектор. Компланарність та колінеарність векторів. Додавання векторів. Множення вектора на число. Розкладання вектора за базисом. Проекція вектора на вісь. Лінійна залежність та незалежність векторів.

Прямокутна декартова система координат. Системи координат на прямій, площині і у просторі. Довжина і напрям вектора у просторі. Поняття n -мірних векторів та дії з ними. Векторний лінійний простір.

Скалярний добуток двох векторів та його механічний зміст. Координатна форма скалярного добутку. Кут між векторами. Умова перпендикулярності векторів. Векторний добуток двох векторів та його геометричний зміст. Координатна форма векторного добутку. Умова колінеарності векторів. Мішаний добуток 3-х векторів та його геометричний зміст. Умова компланарності 3-х векторів.

Аналітична геометрія

Поняття про рівняння поверхонь та ліній. Площина. Рівняння площини, що проходить через задану точку. Низка площин. Загальне рівняння площини. Окремі випадки. Відстань від точки до площини. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності.

Пряма у просторі. Канонічні рівняння. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Параметричні рівняння. Загальні рівняння прямої. Кутові співвідношення.

Пряма на площині. Загальне рівняння. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння пучка прямих. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Відстань від точки до прямої. Кутові співвідношення.

Криві 2-го порядку. Коло, еліпс, гіпербола, парабола (канонічні рівняння). Спрощення загального рівняння кривої 2-го порядку за допомогою перетворення координат.

Введення до математичного аналізу

Границя послідовності (змінної). Нумерована змінна. Послідовність. Нескінченно мала та нескінченно велика змінні величини. Границя послідовності (змінної). Основні теореми про границі.

Границя функції. Означення границі функції. Односторонні границі. Обчислення границь. Розкриття невизначеностей виду $(0/0)$ та (∞/∞) . Перша визначна границя. Друга визначна границя.

Неперервність функції. Приріст функції. Визначення неперервності функції в точці. Умови неперервності функції в точці. Типи розривів. Властивості функцій, неперервних на відрізьку.

Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних

Похідна. Визначення похідної, її механічний та геометричний зміст. Загальна схема визначення похідної. Основні правила диференціювання. Похідна складеної функції. Похідна неявної функції. Похідна степенево-показникової функції. Похідна оберненої функції. Похідні вищих порядків. Похідна функції, що задана параметрично. Таблиця похідних.

Диференціал. Визначення диференціала та його геометричний зміст. Властивість інваріантності форми диференціала. Диференціали вищих порядків. Диференціал дуги.

Теорема Ролля, Лагранжа і Коші. Правило Лопітала. Умови зростання та спадання функцій. Необхідна умова екстремуму функції в точці. Достатня умова екстремуму функції в точці. Дослідження функцій на опуклість та вгнутість. Точки перегину. Асимптоти графіка функції. Повне дослідження функції. Побудова графіків. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Функції багатьох змінних. Визначення функції двох змінних. Приріст функції двох змінних (частинний та загальний). Границя та неперервність функції двох змінних. Частинні похідні функції двох змінних. Узагальнення на випадок функцій n змінних. Частинні похідні вищих порядків. Диференціювання складеної функції. Формула повної похідної. Диференціювання неявної функції однієї та двох змінних. Екстремум функції двох змінних. Необхідна і достатня умови екстремуму функції двох змінних. Умовні екстремуми. Метод множників Лагранжа.

Інтегральне числення

Первісна та її властивості. Означення невизначеного інтеграла та його властивості. Таблиця невизначених інтегралів. Основні методи інтегрування. Безпосереднє інтегрування. Найпростіші підстановки. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен у знаменнику. Інтегрування частинами. Інтегрування найпростіших раціональних дробів. Інтегрування тригонометричних виразів. Інтегрування ірраціональностей. Тригонометричні підстановки.

Визначений інтеграл. Визначення та властивості. Визначений інтеграл як функція верхньої границі. Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування частинами. Геометричні застосування визначеного інтеграла (обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги, об'єма тіла обертання).

Невластиві інтеграли. Інтеграли з нескінченними границями. Інтеграли від необмежених функцій.

Кратні інтеграли. Подвійний та потрійний інтеграли. Їх властивості. Обчислення подвійних інтегралів у декартових і полярних координатах. Обчислення потрійних інтегралів у декартових і циліндричних координатах. Криво-лінійні інтеграли першого та другого роду. Їх властивості та обчислення.

Диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття та визначення. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними. Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Диференціальні рівняння вищих порядків. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Лінійний оператор та його властивості. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Визначення частинного розв'язку за видом правої частини. Метод варіації довільних сталих.

Нормальні системи диференціальних рівнянь першого порядку. Метод виключення. Розв'язання системи диференціальних рівнянь за допомогою характеристичного рівняння.

Ряди

Числові ряди. Нескінченна геометрична прогресія. Основні поняття та визначення. Знакосталі ряди. Необхідна умова збіжності. Достатні ознаки збіжності: порівняння рядів; ознака Даламбера; радикальна та інтегральна ознаки Коші. Знакозмінні ряди. Визначення. Ознака збіжності (теорема Лейбніца). Абсолютна та умовна збіжності. Узагальнена ознака Даламбера.

Функціональні ряди. Область збіжності функціонального ряду. Степеневий ряд. Теорема Абеля про область збіжності степеневого ряду. Радіус збіжності. Рівномірна збіжність. Властивості рівномірно збіжних рядів. Розвинення функцій у степеневі ряди. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Розвинення деяких елементарних функцій у ряд Маклорена.

Застосування рядів до наближених обчислень: обчислення значень функцій, обчислення визначених інтегралів, інтегрування деяких диференціальних рівнянь.

III. Задачі для контрольних робіт

У задачах 1-10 розв'язати систему лінійних рівнянь

а) за методом Крамера; б) за методом Гаусса; в) матричним методом.

$$1. \begin{cases} x + 2y - z = 12 \\ 3x - y + 4z = -13 \\ -x + 5y - z = 27 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + 4y - 5z = 8 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - 2y - z = 6 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 5x + 12y - 2z = -1 \\ 4x + 9y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ x + 3y + 9z = 2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - y + 2z = 6 \\ 5y + z = -3 \end{cases}$$

У задачах 11-20 дослідити системи лінійних рівнянь на сумісність та у разі сумісності знайти їх загальний розв'язок. Для однорідної системи побудувати фундаментальну систему розв'язків.

$$11. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$12. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$13. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$14. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases} ; \text{ б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$15. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} ; \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$16. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = -1 \end{cases} ; \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$17. \text{ a) } \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases} ; \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$18. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases} ; \text{ б) } \begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0 \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$19. \text{ a) } \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases} ; \text{ б) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 13x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$20. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8 \end{cases} ; \text{ б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

У задачах 21-30 визначити власні значення та власні вектори даної матриці.

$$21. \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$22. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$23. \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$24. \begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$25. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$26. \begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$27. \begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$28. \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$29. \begin{pmatrix} -6 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 8 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$30. \begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

У задачах 31-40 задані координати вершин піраміди ABCD.

Знайти: а) довжину ребра АВ, б) кут між ребрами АВ і AD, в) рівняння грані ABC, г) кут між ребром АВ та гранню ABC, д) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC, е) об'єм піраміди.

31. A (7; 5; 3), B (9; 4; 4), C (4; 5; 7), D (3; 2; 7).

32. A (-2; 1; 2), B (4; 0; 0), C (3; 2; 7), D (1; 3; 2).

33. A (3; 1; -2), B (1; -2; 1), C (-2; 1; 0), D (2; 2; 5).

34. A (1; -1; 6), B (4; 5; -2), C (-1; 3; 0), D (6; 1; 5).

35. A (10; 6; 6), B (-2; 8; 2), C (6; 8; 9), D (7; 10; 3).

36. A (7; 7; 3), B (6; 5; 8), C (3; 5; 8), D (8; 4; 1).

37. A (6; 1; 5), B (-1; 3; 0), C (4; 5; -2), D (1; -1; 6).

38. A (1; -2; 1), B (3; 1; -2), C (2; 2; 5), D (-2; 1; 0).

39. A (3; 1; 4), B (-1; 6; 1), C (-1; 1; 6), D (0; 4; -1).

40. A (9; 5; 5), B (-3; 7; 1), C (5; 7; 8), D (6; 9; 2).

У задачах 41-50 задані координати вершин трикутника ABC.

Знайти: а) довжину сторони BC, б) рівняння сторони BC, в) рівняння висоти, опущеної з вершини A на сторону BC, г) рівняння медіани, проведеної з

вершини В на сторону АС, д) рівняння бісектриси внутрішнього кута В трикутника, е) площу трикутника.

41. $A(-10; 5), B(14; -2), C(-4; 22).$

42. $A(-20; 1), B(4; -6), C(-14; 18).$

43. $A(-13; 5), B(11; -2), C(-7; 22).$

44. $A(-15; -7), B(9; -14), C(-9; 10).$

45. $A(-13; -5), B(11; -12), C(-7; 12).$

46. $A(-8; 4), B(16; -3), C(-2; 21).$

47. $A(5; 3), B(29; -4), C(11; 20).$

48. $A(-10; 12), B(14; 5), C(-4; 29).$

49. $A(-20; 4), B(4; -3), C(-14; 21).$

50. $A(-10; 10), B(14; 3), C(-4; 27).$

У задачах 51-60 виконати вказані завдання.

51. Записати рівняння кола, радіус якого дорівнює 2, якщо відомо, що коло проходить через вершину кривої $x^2 - 2x - y + 2 = 0$, а центр кола належить прямій $x + y = 0$. Зробити рисунок.

52. Написати канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис та симетричні відносно початку координат, якщо відомо, що ексцентриситет еліпса $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а мала піввісь дорівнює відстані від фокуса кривої $y^2 = 4x$ до прямої $4x + 3y + 11 = 0$. Зробити рисунок.

53. Написати рівняння параболи та її директриси, якщо вершина параболи збігається з центром кола $x^2 - 14x + y^2 - 8y + 56 = 0$, а фокус співпадає з правим фокусом кривої $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1$. Зробити рисунок.

54. Через середину відрізка, що з'єднує правий фокус кривої $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ та центр кола $x^2 - 6x + y^2 + 2y - 6 = 0$, провести пряму з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює радіусу даного кола. Зробити рисунок.

55. Скласти рівняння прямої, що проходить через центр кривої $x^2 + 2x + y^2 + 10y + 25 = 0$ паралельно тій асимптоті гіперболи $x^2 - 9y^2 = 9$, яка має додатний кутовий коефіцієнт. Зробити рисунок.

56. Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину кривої $y^2 - 4x + 20 = 0$ під кутом 45° до тієї асимптоти гіперболи $x^2 - 4y^2 = 4$, яка має додатний кутовий коефіцієнт. Зробити рисунок.

57. Записати канонічне рівняння еліпса, осі якого збігаються з осями координат, якщо відомо, що права вершина еліпса розташована у центрі кривої $x^2 - 10x + y^2 - 30 = 0$, а точка $A\left(\frac{5}{2}; 2\sqrt{3}\right)$ лежить на еліпсі. Зробити рисунок.

58. Написати рівняння кола, яке дотикається обох осей координат та проходить через фокус кривої $y^2 - 16x + 4y - 44 = 0$. Зробити рисунок.

59. Обчислити відстань від вершини вітки гіперболи $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$ до прямої $6x - 8y + 9 = 0$. Зробити рисунок.

60. Скласти рівняння прямої, що з'єднує ліву вершину еліпса $x^2 - 6x + 4y^2 + 24y + 41 = 0$ та середину відрізка АВ, де $A(7; -5)$, $B(-5; -7)$. Зробити рисунок.

У задачах 61-70 обчислити границі, не використовуючи правила Лопітала.

61. а) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^3 - 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 4^x + 5^x}{2^x + 6^x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$; д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} \right)^{x^3 - 5}$

62. а) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 14x}{2x + \sqrt[3]{x^2}}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+2x-x^2} - \sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\sqrt{3}/2 - \cos x}$;

д) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (1 + \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$

63. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - x}{\sqrt{x+1} + x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{9+x} + x + 7}{\sqrt[3]{15+2x} + 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos(x + \pi/4)}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}$

$$64. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{9x^3 + 9x^2 - x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{5x^2 + 4x + 7} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{16-x^2} - 4}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin \pi x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{3}\right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{3}}$$

$$65. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{x+2} - 16}{4^x - 16}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - 2x}\right)^4;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{x+3}{3-x}} - 1}{x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 5} \sin\left(\frac{x+5}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{10}\right); \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$66. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -0.5} \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x^2 - 18x - 10}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 4}{7x^2 + 5x - 2} - \frac{5^x + 1}{4 - 3 \cdot 5^x}\right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{x+x^2+2x^3}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{5x}$$

$$67. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0.4} \frac{5x^3 - 2x^2 + 5x - 2}{5x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+x} + \sqrt{x^3}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x^2 - 1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg}^2 x; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^3)^{1/x^3}$$

$$68. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{9-x^2}{6-2x}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt[4]{16x^4+1}}{\sqrt[5]{x^5+2}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 5\sqrt{x} + 6}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x^2)^{1/\sin^2 x}$$

$$69. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^x;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin \sqrt{x} - \sin \sqrt{7}}{2x-14}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x-10}$$

$$70. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x + 2} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cos 2x - \cos 4}{14x + 28};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) [\ln(x + 2) - \ln x].$$

У задачах 71-80 дослідити функцію на неперервність; за наявності точок розриву встановити їх рід, обчислити стрибки функцій у точках розриву першого роду, побудувати схематичний графік функції.

$$71. \quad \text{a) } y = e^{\frac{1}{4-x}};$$

$$72. \quad \text{a) } y = 2 - 3e^{-\frac{1}{(4+x)^2}};$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < 3. \\ 6, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 7/12 \\ 3x + 1/4, & 7/12 < x < 2. \\ \sqrt{|x-3|}, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$73. \quad \text{a) } y = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2-x}};$$

$$74. \quad \text{a) } y = 4 + e^{-\frac{1}{(2-x)^2}};$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 3, & 0 \leq x < 3. \\ 4, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 3^{-|x|}, & x < 1 \\ |x-2| - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$75. \quad \text{a) } y = \frac{1}{1 + 2^{1/x}};$$

$$76. \quad \text{a) } y = e^{\frac{1}{x+3}};$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{|1-x|}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 3 \cos \frac{\pi x}{4}, & x \in [-2; 2) \\ |x-2|, & x \in (-\infty; -2) \cup [2; +\infty) \end{cases}$$

77. a) $y = \log_2|x|$;

78. a) $y = \frac{|x-1|}{x^2 - x^3}$;

б) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x < 1 \\ 4 - x, & 1 \leq x < 4 \\ x - 3, & x \geq 4 \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}(2x^2 + 5), & x \leq 1 \\ 5 - 4x, & 1 < x < 3 \\ x - 5, & x \geq 3 \end{cases}$

79. a) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{5-x}$;

80. a) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$;

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 1 \\ x + 2, & 1 < x < 4 \\ 3x - 8, & x \geq 4 \end{cases}$

У задачах 81-90 знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ заданих функцій.

81. а) $y = \arcsin^3\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{2}{x}$;

б) $y = (\sqrt{1-x})^{\operatorname{ctg} 2x}$;

в) $x^3 + \ln y - x^2 y^3 = 0$;

г) $\begin{cases} x = e^t \cos 2t \\ y = e^t \sin 2t \end{cases}$

82. а) $y = \sqrt{\sin^3 5x} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{12} + e^{-x}\right)$;

б) $y = (1 + 2x^4)^{\arcsin 3x}$;

в) $2y \ln y = x^4 + y^3$;

г) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

83. а) $y = \frac{\operatorname{arctg}^4 8x}{\sqrt[3]{\pi x + 4}} + \ln \frac{2}{x^5}$;

б) $y = (\operatorname{ctg} 4x)^{\sqrt{2x-6}}$;

в) $x^5 + y^3 e^{2y} = 1$;

г) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$

84. а) $y = \sqrt{2 - \cos^3 4x} \cdot e^{-5/x} + 10^{\sqrt{x}}$; б) $y = (7 + \operatorname{arctg} 4x)^{3x}$;

в) $xy + \operatorname{ctg}(x - 2y) = 0$;

г) $\begin{cases} x = \ln \sin \frac{t}{2} \\ y = \ln \sin t \end{cases}$

85. а) $y = e^{1-x} \arccos \frac{5x}{3}$;

б) $y = \left(\ln \frac{3}{x} \right)^{4x-6}$;

в) $3^{\sin xy} - 3x(y - \pi) = 1$;

г) $\begin{cases} x = \frac{2 \cos 2t - 1}{2 \cos t} \\ y = \operatorname{ctg} 2t \end{cases}$

86. а) $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} \left(\frac{7}{x^2} \right)} \cdot 4^{-\cos^3 x}$;

б) $y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{(3-x)^2}$;

в) $\sqrt{2x + xy} - 4 \ln y = \sqrt{2}$;

г) $\begin{cases} x = \frac{e^t}{t} \\ y = (t-1)^2 e^t \end{cases}$

87. а) $y = \frac{x^{\sqrt{5}} + 2x}{\operatorname{ctg}^{10} \sqrt{5x}}$;

б) $y = \left(1 + \sqrt[3]{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x}$;

в) $x \arccos \frac{x}{y} - y = 0$;

г) $\begin{cases} x = \sin \ln \frac{t}{2} \\ y = \sin^2 \ln t \end{cases}$

88. а) $y = \sin^4 \left(\frac{1-x}{3} \right) \cdot 2^{\sqrt{x}}$;

б) $y = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{5} \right)^{\cos x}$;

в) $x \sin(x - y) + y \cos(y - x) = 0$;

г) $\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t \end{cases}$

89. а) $y = \frac{e^{-\sin 2x} + \cos^3 4x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$;

б) $y = \left(2 + \frac{3}{x} \right)^{\pi x + \operatorname{ctg} x}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$;

г) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{cases}$

$$90. \text{ а) } y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\operatorname{arctg} 2x} \cdot \frac{x^2 - 3}{4x + 6};$$

$$\text{б) } y = (2 \ln(5x + 3))^{2x};$$

$$\text{в) } e^{xy} + x - 2y^3 = c;$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$$

У задачах 91-100 виконати вказані завдання.

91. Під яким кутом крива $y = 2^{\sin x} - 1$ перетинає вісь абсцис?

92. Хорда парболи $y = x^2 - 2x + 5$ з'єднує точки з абсцисами $x = 1$ та $x = 3$. Скласти рівняння тієї дотичної до параболі, що буде паралельна хорді.

93. При яких значеннях параметра a дотичні до графіка функції $y = \frac{17}{3}x^3 - a^2x$, проведені в точках з абсцисами $x = 0$ та $x = a$, взаємно перпендикулярні?

94. Під яким кутом крива $y = e^{-x}$ перетинає пряму $y = 1$?

95. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \frac{1}{1+x^2}$ у точках перетину її з гіперболою $y = \frac{1}{1+x}$.

96. У точці $M(8;1)$ до кривої $y = \left(\sqrt{5 - \sqrt[3]{x^2}}\right)^3$ проведена дотична.

Обчислити довжину її відрізка між точками перетину з осями координат.

97. У точці перетину графіків функцій $y = \frac{6}{\sqrt{x}}$ та $y = \frac{12}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$

проведені дотичні до кожного графіка. Обчислити різницю кутів, утворених цими дотичними з додатним напрямом осі абсцис.

98. Скласти рівняння дотичних до кривої $y = x^2 - 4x + 3$, що проходять через точку $M(2; -5)$.

99. Знайти параметри p і q у рівнянні параболі $y = x^2 + px + q$, якщо вона проходить через точку $M(-1; 0)$ та дотикається до прямої $y = x$.

100. Пряма $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{32}$ є дотичною до графіка функції $y = 0,5x^4 - x$.

Знайти координати точки дотику.

У задачах 101-110, виконавши повне дослідження функції, побудувати її графік.

$$101. y = \left(\frac{x}{2} + 3\right) \cdot e^{\frac{1}{2x}};$$

$$106. y = \sqrt[3]{x^3 - 2x};$$

$$102. y = 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$107. y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2};$$

$$103. y = x^2 \cdot e^{-x^2};$$

$$108. y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$104. y = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}};$$

$$109. y = \frac{|x-1|}{x^2};$$

$$105. y = x^2 \cdot e^x;$$

$$110. y = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2};$$

У задачах 101-110 з'ясувати, чи задовольняє задана функція вказане рівняння.

$$111. z = x^y; \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

$$112. z = \ln(e^x + e^y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

$$113. z = x \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0.$$

$$114. z = \sqrt{\frac{x}{y}}; \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0.$$

$$115. z = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) = 0.$$

$$116. z = x \cdot \ln \frac{y}{x}; \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$117. z = \cos y + (y-x) \sin y; \quad (x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$118. z = x \cdot e^{y/x}; \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$119. z = \ln(x + e^{-y}); \quad \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

$$120. u = \frac{y}{x} \exp\left(\frac{xz}{y^2}\right); \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

У задачах 121-130 дослідити функцію на екстремум.

$$121. z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

$$122. z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$$

$$123. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

$$124. z = 2xy - 4x - 2y.$$

$$125. z = e^{x/2} \cdot (x + y^2).$$

$$126. z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$$

$$127. z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

$$128. z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2.$$

$$129. z = x^2 + xy + y^2.$$

$$130. z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10.$$

У задачах 131-140 знайти умовний екстремум функції $u = f(x, y)$ відносно даного рівняння зв'язку.

$$131. z = xy, \quad x + y = 1.$$

$$132. z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \quad x + y = 2.$$

$$133. z = 6 - 5x - 4y; \quad x^2 - y^2 = 9.$$

$$134. z = 8 - 2x - 4y; \quad x^2 + 2y^2 = 12.$$

$$135. z = 2xy; \quad x + y = 2.$$

$$136. z = 6 - 4x - y; \quad x^2 + y^2 = 17.$$

$$137. z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10; \quad x + y = 4.$$

$$138. z = x + 2y; \quad x^2 + y^2 = 5.$$

$$139. z = x^2 - xy + y^2 + x + y - 4; \quad x + y = -4.$$

$$140. z = 1 - 4x - 8y; \quad x^2 - 8y^2 = 8.$$

У задачах 141-150 виконати вказані завдання.

141. У яких точках $\text{grad}(x + y^2 + 18z^3 - 3xyz)$ паралельний осі Oz ?

142. Обчислити кут між $\text{grad } u(M_1)$ та $\text{grad } u(M_2)$, якщо

$$u = \text{arctg} \frac{x}{y+z}, \quad M_1(1;1;0), \quad M_2(-1;0;1).$$

143. У яких точках $\text{grad}(x^2 + y^2 - 2xy)$ перпендикулярний до прямої $y = x$?

144. Знайти напрям найбільшої зміни функції $u = x \sin z - y \cos z$ на початку координат?

145. Обчислити кут між градієнтами функцій $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ та $v = x - 3y + \sqrt{3xy}$ у точці $M(3; 4)$.

146. Знайти точку, у якій градієнт функції $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ дорівнює вектору $\vec{a} = \vec{i} - 16\vec{j}/9$.

147. Знайти точки, у яких модуль градієнта функції $z = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$ дорівнює 2.

148. Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ у точці $M_1(3; 1)$ за напрямом $\vec{M_1M_2}$, якщо $M_2(6; 5)$.

149. Довести, що функція $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ задовольняє співвідношення $u = 2 \ln 2 - \ln(\text{grad } u)^2$.

150. Знайти величину максимальної швидкості зростання функції $u = \text{tg}(yz) + e^{z \ln x} - z$ у точці $M(1; 0; 2)$.

У задачах 151-160 знайти невизначені інтеграли.

151. а) $\int x \sin x^2 dx$; б) $\int x^2 \ln(x-1) dx$; в) $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$;

г) $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}$.

152. а) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(3-x^3)}$; б) $\int x \arcsin x dx$; в) $\int \frac{x^3 - 4}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx$;

г) $\int \sin^4 2x dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx$.

$$153. \text{ a) } \int x^7 (2x^8 + 1)^{10} dx; \quad \text{б) } \int x \sin 2x dx; \quad \text{в) } \int \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1} dx;$$

$$\text{г) } \int \cos^4 x \sin^3 x dx; \quad \text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$154. \text{ a) } \int \cos x \cdot 5^{\sin x} dx; \quad \text{б) } \int x^2 \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^3 + 2}{4x^3 - x} dx;$$

$$\text{г) } \int \cos^4 3x dx; \quad \text{д) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$155. \text{ a) } \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 - \cos^2 x}}; \quad \text{б) } \int e^x \ln(e^x + 1) dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx;$$

$$\text{г) } \int \operatorname{tg}^5 2x dx; \quad \text{д) } \int \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt{x}} dx.$$

$$156. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \operatorname{ctg}^2 x)}; \quad \text{б) } \int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^4 + 2x - 2}{x^4 - 1} dx;$$

$$\text{г) } \int \operatorname{ctg}^4 2x dx; \quad \text{д) } \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x - 5}}.$$

$$157. \text{ a) } \int \frac{1}{x} \cos \ln x dx; \quad \text{б) } \int x^2 \cos 2x dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^3 - 2}{x^3 + x} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{\sin^2 2x}{\cos^6 2x} dx; \quad \text{д) } \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx.$$

$$158. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^4 x}; \quad \text{б) } \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^4 + 5x^2 - 12}{x^4 - 16} dx;$$

$$\text{г) } \int \sin^4 \frac{3x}{4} dx; \quad \text{д) } \int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx.$$

$$159. \text{ a) } \int \frac{2^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{б) } \int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^3 + 1}{x^3 + 5x^2 + 6x} dx;$$

$$\text{г) } \int \operatorname{ctg}^4 3x dx; \quad \text{д) } \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$160. \text{ а) } \int \frac{x^5 dx}{1+7x^6}; \quad \text{б) } \int \frac{x \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx;$$

$$\text{г) } \int \cos^2 \frac{x}{3} \sin^4 \frac{x}{3} dx; \quad \text{д) } \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x} + 4)\sqrt{x}}.$$

У задачах 161-170 обчислити визначені інтеграли.

$$161. \text{ а) } \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 4x dx.$$

$$162. \text{ а) } \int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x-2}};$$

$$\text{б) } \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$$

$$163. \text{ а) } \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}};$$

$$\text{б) } \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$164. \text{ а) } \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1};$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$165. \text{ а) } \int_1^4 \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^2};$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx.$$

$$166. \text{ а) } \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x \log_2 x dx.$$

$$167. \text{ а) } \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x} \sin x dx;$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$168. \text{ а) } \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + 5 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$169. \text{ а) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x + 3 \sin x + 1) \cos x \, dx;$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}.$$

$$170. \text{ а) } \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx.$$

У задачах 171-180 виконати вказані завдання.

171. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболою $y = x^2 - 3x + 2$ і прямою $y = x + 2$.

172. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої параболою $y = x^2/4$ та $y = 3x - x^2/2$.

173. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = |\ln x|$ та $y = 3$.

174. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$, прямою $y = 3 - x$ і віссю ординат.

175. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = e^x$, $y = \ln x$, $x = 3$, $x = 1$.

176. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = \sqrt{x/2}$, $xy = 2$, $y = 2\sqrt{x}$.

177. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$, прямою $y = 3 - x$ і віссю абсцис.

178. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $x = \sqrt{2y}$, $x = \sqrt{y+2}$ і віссю абсцис.

179. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = x^2$.

180. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $xy = 5$, $y = 1$, $y = 5$, $x = 0$.

У задачах 181-190 обчислити довжину дуги кривої.

$$181. \ y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, \quad 1 \leq x \leq e.$$

$$182. \ y = \ln(\cos x), \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$$

$$183. \ \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$184. \ y = \ln(\sin x), \quad \pi/4 \leq x \leq \pi/2.$$

$$185. \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \ln \pi. \quad 186. y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3.$$

$$187. \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad 188. y = e^{x^2} + e^{-x^2}, \quad 0 \leq x \leq \ln 2.$$

$$189. y = \ln \frac{2}{x^2 - 1}, \quad -4 \leq x \leq -3. \quad 190. \rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq 3\pi/2.$$

У задачах 191-200 обчислити невластиві інтеграли або довести їх розбіжність.

$$191. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x^2 + 2x + 4};$$

$$\text{ б) } \int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{4/5}};$$

$$192. \text{ а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11};$$

$$\text{ б) } \int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x-2}}.$$

$$193. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4};$$

$$\text{ б) } \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^4}.$$

$$194. \text{ а) } \int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$$

$$\text{ б) } \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$195. \text{ а) } \int_0^{\infty} x^2 e^{-3x} dx;$$

$$\text{ б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$$

$$196. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 4};$$

$$\text{ б) } \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}.$$

$$197. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{\sin 3x + 4}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{ б) } \int_1^e \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln x}}.$$

$$198. \text{ а) } \int_3^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x^3 - 2x};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$199. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{(x+1) dx}{x^2 + 2x + 4};$$

$$\text{б) } \int_0^{10} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$200. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}.$$

У задачах 201-210 виконати вказані завдання.

201. Обчислити роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати воду із посудини, що має форму конуса, оберненого вершиною донизу, якщо радіус основи цього конусу R , а висота H .

202. Визначити тиск води на вертикальну рівнобічну трикутну пластинку висотою h , основа якої паралельна поверхні води, а протилежна вершина знаходиться на поверхні води.

203. Яку роботу треба затратити, щоб насипати купу піска у формі зрізаного конуса, висота якого H , радіуси основ R і r , густина піску ρ .

204. Обчислити роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати воду із напівсферичного котла радіуса R .

205. Визначити тиск води на вертикальну пластинку, що має форму полуеліпса, одна з осей якого знаходиться на поверхні води.

206. Котел має форму параболоїда обертання. Радіус основи $R = 2$ м, глибина котла $H = 4$ м. Котел наповнений рідиною, густина якої $\rho = 800$ кг/м³. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати рідину з котла.

207. Визначити тиск води на вертикальний параболічний сегмент, основа якого a розташована на поверхні води, а вершина знаходиться на глибині h .

208. Концентрація речовини у воді змінюється за законом $C(x) = \frac{20x^2}{x^2 + 4}$ кг/м³, де x - глибина шару. Скільки речовини міститься у верти-

кальному стовпі води, площа поперечного перерізу якого $S = 2$ м², а глибина змінюється від 0 до 100 м?

209. Визначити тиск води на вертикальну плотину, що має форму рівнобічної трапеції, верхня основа якої $a = 6,4$ м, нижня $b = 4,2$ м, висота $h = 3$ м.

210. Визначити тиск води на вертикальну квадратну пластинку зі стороною a , яка занурена у воду так, що одна її вершина лежить на поверхні води.

У задачах 211-220 знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

211. а) $xy' = y(1 + \ln \frac{y}{x})$; б) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.

212. а) $y' + y = e^x$; б) $2yy'' - (y')^2 = 0$.

213. а) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$; б) $x(y'' + 1) + y' = 0$.

214. а) $xy' + y = \sin x$; б) $xy'' - y' = x^2 e^x$.

215. а) $(x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$; б) $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

216. а) $(1 - x^2)y' + xy = 1$; б) $y'' y^3 = 1$.

217. а) $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$; б) $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$.

218. а) $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$; б) $y'' x \ln x - y' = 0$.

219. а) $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$; б) $2(y')^2 = (y - 1)y''$.

220. а) $xy' - 2y + x^2 = 0$; б) $2yy'' = 1 + (y')^2$.

У задачах 221-230 знайти частинний розв'язок диференціального рівняння.

221. $y'' - 3y' = x + \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1/9$.

222. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

223. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

224. $y'' - y' = 9x e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.

225. $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

226. $y'' - y' = x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

227. $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

228. $y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

229. $y'' + 2y' + y = \sin x + x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

230. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/9$.

У задачах 231-240 знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь.

$$231. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

$$232. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 11y \end{cases}$$

$$233. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

$$234. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$235. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$236. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$$

$$237. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$238. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$$

$$239. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 9y \end{cases}$$

$$240. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 9y \end{cases}$$

У задачах 241-250 виконати вказані завдання.

241. Швидкість розпаду радія пропорційна його наявній кількості x . Знайти залежність x від часу t , якщо відомо, що через 1600 років залишається половина початкової кількості радія. Прийняти початкову кількість радія за $x_0 = 2$ г.

242. Гальмуюча дія тертя на диск, що обертається у рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Знайти кутову швидкість диска за 3 хвилини після початку обертання, якщо відомо, що диск почав обертатися зі швидкістю 120 об/хв.

243. Знайти тиск повітря P на висоті $h = 1000$ м, якщо відомо, що на рівні моря ($h = 0$) він дорівнює 10^5 Па, а на висоті $h = 500$ м $P = 0.92 \cdot 10^5$ Па.

244. Катер рухається у спокійній воді із швидкістю $V_0 = 10$ км/год. На повному ході двигун катера було виключено і за 2 хвилини швидкість катера зменшилась до $V_1 = 0,5$ км/год. Визначити швидкість, з якою буде рухатися катер через 40 с після виключення двигуна, якщо опір води пропорційний швидкості руху катера.

245. За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою середовища. Якщо температура середовища дорівнює 20° і тіло протягом години охолоджується від 100° до 30° , то за скільки хвилин (від початку охолодження) температура тіла буде дорівнювати 60° ?

246. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(1; 1)$ і має ту властивість, що кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій точці M кривої удвічі більше за кутовий коефіцієнт радіуса-вектора точки M .

247. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(3; 1)$ і має ту властивість, що відрізок дотичної між точками дотику і віссю Ox поділяється навпіл у точці перетину з віссю Oy .

248. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(-1; -1)$ і має ту властивість, що відрізок, який відсікає на осі Ox дотична, проведена в будь-якій точці кривої, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

249. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(1; 0)$ і має ту властивість, що відрізок, який відсікає на осі Oy дотична, проведена в будь-якій точці кривої, дорівнює радіусу-вектору точки дотику.

250. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(1; 2)$ і має ту властивість, що відрізок, який відсікає на осі Oy дотична, проведена в будь-якій точці кривої, дорівнює абсцисі точки дотику.

У задачах 251-260 дослідити на збіжність числові ряди.

$$251. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

$$252. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 9}{3^n}$$

$$253. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{3n}}{n!}$$

$$254. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+3} \right)^n$$

$$255. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{\ln n}}$$

$$256. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$$

$$257. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

$$258. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2 + 1}$$

$$259. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n^2+n}$$

$$260. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(\sqrt{2})^n}$$

У задачах 261-270 дослідити числові ряди на абсолютну та умовну збіжність.

$$261. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

$$262. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$$

$$263. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$$

$$264. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$265. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

$$266. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$$

$$267. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5n+1)^2}$$

$$268. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^n}{n!}$$

$$269. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$$

$$270. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+1)!}$$

У задачах 271-280 знайти область збіжності степеневих рядів та дослідити їх поведінку у граничних точках інтервалу збіжності.

$$271. \text{ а) } 1 - \frac{(x-2)}{4 \cdot 2} + \frac{(x-2)^2}{7 \cdot 2^2} - \dots$$

$$\text{ б) } \frac{2x^2}{4} + \frac{5x^4}{4^2} + \frac{8x^6}{4^3} + \dots$$

$$272. \text{ а) } (x-2) - \frac{(x-2)^2}{5 \cdot 2} + \frac{(x-2)^3}{9 \cdot 2^2} - \dots$$

$$\text{ б) } \frac{5x^2}{\sqrt{3} \cdot 2^2} - \frac{9x^4}{\sqrt{5} \cdot 2^4} + \dots$$

$$273. \text{ а) } (2x-1) - \frac{(2x-1)^2}{5} + \frac{(2x-1)^3}{9} - \dots$$

$$\text{ б) } x^2 - \frac{x^4}{3 \cdot 2^3} + \frac{x^6}{5 \cdot 2^6} - \dots$$

$$274. \text{ а) } (3x-2) - \frac{(3x-2)^2}{4} + \frac{(3x-2)^3}{7} - \dots$$

$$\text{ б) } \frac{x^2}{4 \cdot 3} - \frac{x^4}{4^2 \cdot 5} + \frac{x^6}{4^3 \cdot 7} - \dots$$

275. а) $\frac{(2x-3)}{1 \cdot 2} - \frac{(2x-3)^2}{3 \cdot 2^2} + \frac{(2x-3)^3}{5 \cdot 2^3} - \dots$ б) $x - \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{5 \cdot 7} - \dots$

276. а) $(x-3) + \frac{(x-3)^2}{5 \cdot 3^2} + \frac{(x-3)^3}{9 \cdot 3^4} + \dots$ б) $\frac{x}{2\sqrt{5}} - \frac{x^2}{5\sqrt{5^3}} + \frac{x^3}{8\sqrt{5^5}} - \dots$

277. а) $\frac{(2x-3)}{1 \cdot 3} + \frac{(2x-3)^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{(2x-3)^3}{7 \cdot 3^3} - \dots$ б) $\frac{x}{2 \cdot 3} - \frac{2^2 x^3}{5 \cdot 3^3} + \frac{2^4 x^5}{8 \cdot 3^5} - \dots$

278. а) $\frac{(x-3)}{2} - \frac{(x-3)^2}{4 \cdot 3} + \frac{(x-3)^3}{6 \cdot 3^2} - \dots$ б) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6 \cdot 4} + \frac{x^6}{10 \cdot 4^2} - \dots$

279. а) $\frac{(3x+2)}{2} - \frac{(3x+2)^2}{5 \cdot 2} + \frac{(3x+2)^3}{8 \cdot 2^2} - \dots$ б) $\frac{3^2 x}{2} + \frac{3^4 x^3}{6} + \frac{3^6 x^5}{10} + \dots$

280. а) $(x-4) + \frac{(x-4)^2}{3 \cdot 2} + \frac{(x-4)^3}{5 \cdot 2^2} + \dots$ б) $\frac{2x}{3^2} - \frac{5x^3}{3^4} + \frac{8x^5}{3^6} - \dots$

У задачах 281-290 розвинути функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 .

281. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$. 282. $f(x) = \cos(x/2)$, $x_0 = \pi/2$

283. $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = -1$. 284. $f(x) = 1/x$, $x_0 = 1$

285. $f(x) = e^{3x}$, $x_0 = 1$. 286. $f(x) = 2^x$, $x_0 = 3$

287. $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x_0 = 1$. 288. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$

289. $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$, $x_0 = 3$. 290. $f(x) = \cos 2x$, $x_0 = \pi/8$.

У задачах 291-300 знайти три перші відмінні від нуля члени розвинення в ряд Маклорена функції $f(x)$.

291. $f(x) = 2^x \cos x$. 292. $f(x) = \sin(x-a)$.

293. $f(x) = 2^{\sin x}$. 294. $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

295. $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$. 296. $f(x) = x \cdot \ln(1+x^2)$.

297. $f(x) = (1 + e^x)^2.$

298. $f(x) = \operatorname{tg} x.$

299. $f(x) = \sec x.$

300. $f(x) = e^x \cdot \ln(1 + x).$

У задачах 301-310 обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001.

301. $\int_0^1 e^{-x^2/3} dx.$

302. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx.$

303. $\int_0^{0.5} x \cdot \operatorname{arctg} x dx.$

304. $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx.$

305. $\int_0^{0.5} x \ln(1-x^2) dx.$

306. $\int_0^{0.5} x \cdot e^{-x} dx.$

307. $\int_0^{0.5} \operatorname{arctg} x^2 dx.$

308. $\int_0^{0.5} \sin x^2 dx.$

309. $\int_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{x^2} dx.$

310. $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^2} dx.$

У задачах 311-320 знайти перші три (відмінні від нуля) члени розвинення в ряд Маклорена частинного розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння.

311. $y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1.$

312. $y' = \sin x + y^2/2, \quad y(0) = 1.$

313. $y' = e^x + y, \quad y(0) = 4.$

314. $y' = 2e^y - xy, \quad y(0) = 0.$

315. $y' = e^x + y^2, \quad y(0) = 0.$

316. $y' = 2 \sin x + y^2, \quad y(0) = 1.$

317. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 2.$

318. $y' = x + x^2 + y^2, \quad y(0) = 5.$

319. $y' = y + y^2, \quad y(0) = 3.$

320. $y' = y + xe^y, \quad y(0) = 0.$

У задачах 321-330 розвинути функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi, \pi)$.

321. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$

322. $f(x) = x + 1.$

$$323. f(x) = \begin{cases} -\pi/4, & -\pi < x < 0 \\ \pi/4, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad 324. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$325. f(x) = x - 1.$$

$$326. f(x) = x/2 + 1.$$

$$327. f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$328. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$329. f(x) = \begin{cases} x/3, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$330. f(x) = \begin{cases} x+1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

У задачах 331-340 змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі.

$$331. \int_0^1 dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx.$$

$$332. \int_1^e dy \int_{1-\ln y}^1 f(x, y) dx.$$

$$333. \int_{-2}^2 dy \int_{y^2-1}^3 f(x, y) dx.$$

$$334. \int_{-2}^0 dy \int_{1+\sqrt{-y^2-2y}}^1 f(x, y) dx.$$

$$335. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

$$336. \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy.$$

$$337. \int_{1/2}^1 dy \int_{\log_2 y}^0 f(x, y) dx.$$

$$338. \int_0^1 dy \int_{\arccos y}^{\pi/2} f(x, y) dx.$$

$$339. \int_0^1 dx \int_{e^x}^e f(x, y) dy.$$

$$340. \int_{-4}^{-1} dx \int_1^{-4/x} f(x, y) dy.$$

У задачах 341-350 виконати вказані завдання.

341. Знайти масу круглої пластини радіусу R , якщо поверхнева густина в кожній точці пластини пропорційна квадрату відстані від її центра.

342. Знайти момент інерції відносно осі Ox однорідної еліптичної пластинки, півосі якої дорівнюють a та b .

343. Знайти центр мас однорідної плоскої фігури, яка обмежена лініями $\rho = 2a \cos \varphi$ та $\rho = 4a \cos \varphi$.

344. Знайти координати центра мас однорідної плоскої фігури, обмеженої параболою $y = 2x - 3x^2$ та віссю Ox .

345. Знайти координати центра мас однорідної плоскої фігури, обмеженої параболою $y^2 = 4x + 4$ та $y^2 = -2x + 4$.

346. Знайти координати центра мас однорідної плоскої фігури, обмеженої параболою $x = 2y - 3y^2$ та віссю Oy .

347. Знайти координати центра мас однорідної плоскої фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

348. Обчислити статичний момент круга відносно його дотичної.

349. Обчислити момент інерції квадрата, сторона якого дорівнює a , відносно його вершини.

350. Обчислити момент інерції прямокутника зі сторонами a та b відносно точки перетину його діагоналей.

У задачах 351-360 знайти об'єм тіла, обмеженого даними поверхнями.

351. $x = y^2, z + y = 1, x = 1, y = 0, z = 0.$

352. $4z = y^2, 2x - y = 0, x + y = 3, z = 0, x = 0.$

353. $z = (x - 1)^2, y^2 = x, z = 0.$

354. $z = y^2 + 1, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

355. $z = x^2, z = 0, 2x - y = 0, x + y = 9.$

356. $z = x^2 + 3y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

357. $x = y^2, z + y = 1, x = 1, y = 0, z = 0.$

358. $z = x^2 + 3y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

359. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$

360. $x = 8y^2, 2y + z = 1, x = 2, y = 0, z = 0.$

У задачах 361-370 знайти роботу сили \vec{F} при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N .

361. $\vec{F} = (2x - y)\vec{i} - (3x + y)\vec{j}, L: 4x^2 + y^2 = 16, M(0; -4), N(2; 0).$

362. $\vec{F} = 3xy\vec{i} + (2y - x)\vec{j}, L: x^2 + 2y = 4, M(-2; 0), N(0; 2).$

363. $\vec{F} = 3x^3\vec{i} - 15xy^3\vec{j}$, $L: x^2 + y^2 = 4$, $M(2;0)$, $N(0;2)$.
364. $\vec{F} = 3x^2y\vec{i} - 3y\vec{j}$, $L: y = 1 - x^2$, $M(-1;0)$, $N(0;1)$.
365. $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 4x)\vec{j}$, $L: 8y = 16 - x^2$, $M(-4;0)$, $N(0;2)$.
366. $\vec{F} = (x + 4y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, $L: y = x^2$, $M(-1;1)$, $N(1;1)$.
367. $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$, $L: x^2 + y^2 = 9$, $M(3;0)$, $N(0;3)$.
368. $\vec{F} = 3(x^2 + y^2)\vec{i} + 3y^2\vec{j}$, $L: 2y = 4 - x^2$, $M(0;2)$, $N(2;0)$.
369. $\vec{F} = (x + y)^2\vec{i} - (x^2 + y^2)\vec{j}$, $L: y = 1 - x^2$, $M(1;0)$, $N(0;1)$.
370. $\vec{F} = (5xy - 2x)\vec{i} + x^2\vec{j}$, $L: y^2 = 4x$, $M(0;0)$, $N(1;2)$.

У задачах 371-380 перевірити, чи залежить інтеграл від форми кривої L . Обчислити цей інтеграл, якщо L - довільна лінія з початком у точці A і кінцем у точці B .

371. $\int_L (3 + 2xy^2)dx + (2x^2y + 2y)dy$, $A(1;2)$, $B(-1;4)$.

372. $\int_L (2xy^2 + 3x^2y)dx + (2x^2y + x^3)dy$, $A(-3;-2)$, $B(1;2)$.

373. $\int_L (3y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 6xy)dy$, $A(4;1)$, $B(1;3)$.

374. $\int_L (y + 2xy^2)dx + (x + 2x^2y + 2)dy$, $A(-1;-1)$, $B(2;1)$.

375. $\int_L (6x^2y + x)dx + (2x^3 + 2y)dy$, $A(1;3)$, $B(3;-1)$.

376. $\int_L (3x^2y^2 + 2)dx + (2x^3y + 1)dy$, $A(-1;1)$, $B(2;3)$.

$$377. \int_L (y^3 + 2x)dx + (3xy^2 + 1)dy, \quad A(-3; -1), \quad B(2; 1).$$

$$378. \int_L (1 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4)dy, \quad A(-1; -2), \quad B(3; 1).$$

$$379. \int_L (6x^2y^2 + 2x)dx + (4x^3y + 2y)dy, \quad A(1; 2), \quad B(-1; -3).$$

$$380. \int_L (4xy^3 + 8x)dx + (6x^2y^2 + 2y)dy, \quad A(2; 1), \quad B(4; 3).$$

Список рекомендованої літератури

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т.- М.: Наука, 1985.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.- М.: Наука, 1988.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М.: Наука, 1988.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник.- М.: Наука, 1982.
5. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики.- М.: Наука, 1975.
6. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики.- М.: Наука, 1968.
7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике.- Харьков: ХГУ, 1970.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч.- М.: Высш. шк., 1986.
9. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Наука, 1987.

Укладачі:

Людмила Василівна Новикова
Світлана Олександрівна Сушко
Валентина Пантеліївна Орел
Людмила Іванівна Заславська

ПРОГРАМА ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ
з дисципліни "Вища математика" для студентів заочної форми навчання

Редакційно-видавничий комплекс
Редактор В.А.Третяк

Підписано до друку 07.09.2001. Формат 30 x42/4.
Папір Captain. Ризографія. Умовн. Друк.арк. 2,0.
Обліково-видавн.арк.2,0. Тираж 1000 прим. Зам. № 436.

Національний гірничий університет
49027, м.Дніпропетровськ-27, просп. К.Маркса, 19.